Petre Simion Victor Nicolae

Prof.univ.dr.ing.mat. Augustin Semenescu • Carmen Angelescu
Ovidiu Bădescu • Daniela Boanţă • Alexandru Constantinescu
Gabriela Dăneţ • Sînziana Dumitran • Jenica Mitrin
Felicia Opran • Cezar Păcuraru • Mădălina Stănescu
Ileana Şerban • Gabriela Tănase • Monica Ţopană

MATEMATICĂ

BREVIAR TEORETIC

EXERCIŢII ŞI TESTE DE EVALUARE PENTRU BACALAUREAT

M2

Consultant:
Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ

NICULESCU

CUPRINS

PARTEA I

TEME RECAPITULATIVE

1 Mulțimi de numere. Mulțimea numerelor reale. Mulțimea numerelor complexe. Elemente de logică matematică. Progresii aritmetice şi geometrice

IMPORTANT!

Mulțimea numerelor reale

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, unde
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$,
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \mid x$ este fracție zecimală cu o infinitate de zecimale care nu se repetă periodic$\}$. *Exemple*: $17 \in \mathbb{N}$; $-17 \in \mathbb{Z}$; $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$;
  $1,2(32) \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $1,101001000100001.... \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
- **Partea întreagă şi partea fracționară a unui număr real**
  $[x] = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \le x\}$ este partea întreagă a numărului real x.
  $\{x\} = x - [x]$ se numeşte partea fracționară a lui x.

Proprietăți:

1) $[x] \le x < [x] + 1$

2) $[x + n] = [x] + n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$

3) $x - 1 < [x] \le x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

1) $\{x\} \in [0, 1)$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

2) $\{x + n\} = \{x\} \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$

3) $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

Cazul $n = 2$ în identitatea lui Hermite: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

Mulțimea numerelor complexe, forma algebrică

- $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}$ şi $i^2 = -1\}$ $\quad a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$.
- **Modulul** numărului complex $z = a + bi$ este numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Conjugatul** numărului complex $z = a + bi$ este numărul complex $z = a - bi$.

Proprietăți:

1) $|z| \ge 0$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$

2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $(\forall)\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $(\forall)\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $(\forall)\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

3) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $(\forall)\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$

Propoziții:

1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ 2) $z \in i\mathbb{R}^*$ (este pur imaginar) $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$

Progresii aritmetice și geometrice

- Șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ este o **progresie aritmetică** de rație r, dacă diferența oricăror doi termeni consecutivi este constantă, adică $a_{n+1} - a_n = r$.
- Șirul de numere reale $(b_n)_{n \geq 1}$ este o **progresie geometrică** de rație q, dacă raportul oricăror doi termeni consecutivi este constant, adică $b_{n+1} : b_n = q$.

Proprietăți:

1) $a_n = a_1 + (n-1)r, (\forall)\, n \geq 1$ 1) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall)\, n \geq 1$

2) $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, (\forall)\, n \geq 2$ 2) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, (\forall)\, n \geq 2$

3) $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2} = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2}, (\forall)\, n \geq 1$ 3) $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1, (\forall)\, n \geq 1.$

Exerciții și probleme

1. Calculați:

a) $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$; b) $\left|\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right|$.

2. Pentru $a, b, c > 0$, $\sqrt{abc} > 2$, calculați: $\dfrac{1}{\sqrt{abc}-2} \cdot \sqrt{\dfrac{abc+4}{a} - 4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}$.

3. Se consideră numerele reale $x = \dfrac{17}{6}$, $y = 2{,}8(3)$, $z = \sqrt{7}$.

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
p: $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; q: $z \in \mathbb{Q}$; r: $x > y$; s: $x = y$; t: $x \leq z$; w: $y \leq z$.

4. Să se demonstreze prin inducție matematică inegalitatea:
$\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}, n \geq 2.$

5. Determinați $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + 2y^2 + 2xy + 2y + 1 = 0$.

6. Arătați că $x^2 + 3xy + 4y^2 \geq 0, (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

(Variante Bacalaureat 2009)

7. Aflați elementele mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left\{\dfrac{5x-2}{3}\right\} = x+1 \right\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a lui $a \in \mathbb{R}$.

8. Arătați că numărul $a = 3(2 + 5i) - 5(1 + 3i)$ este real.

(Bacalaureat 2012, Științele naturii)

9. Aflați numerele reale x și y astfel încât $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + iy)^2$.

10. Demonstrați egalitatea: $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

11. Să se calculeze: a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$; c) $\sum_{k=1}^{n} kq^k$.

12. Să se determine elementele mulțimii: $A=\left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, \frac{z-i}{2z}\in\mathbb{R}\right\}$.

13. Calculați sumele: a) $3+5+...+(2n+3)$; b) $1+5+9+...+(4n+1)$.

14. Calculați:

a) $\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{2049\cdot 2050}\right]$; b) $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{10}]$.

15. Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind că $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

16. Determinați numărul real x știind că are numerele 10, $x + 1$ și $1 - x$ sunt în progresie aritmetică.

17. Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 24, ...

18. Dacă $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{100}}$, arătați că $S\in(1; 2)$.

(Variante Bacalaureat 2009, adaptate)

19. Fie a_1, a_2, ..., a_{21} o progresie aritmetică în care $a_{11} = 15$. Aflați $S = a_1 + a_2 + ... + a_{21}$.

20. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_1 + a_5 + a_9 = 51$. Aflați $S = a_3 + a_4 + a_5 + a_8$.

21. Să se determine tripletele de numere reale (x, y, z) astfel încât $x + y + z = 3$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

22. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Calculați:

a) $f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(2050)$;

b) $f(2) + f(2^2) + ... + f(2^{10})$;

c) $f^2(0) + f^2(1) + f^2(2) + ... + f^2(n)$.

23. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 1$, $a_{10} = 28$. Calculați a_{2050}.

24. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că $x + 1$, $2x + 3$ și $x - 3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

25. Să se determine numărul natural n din egalitatea: $1 + 5 + 9 + ... + n = 276$.

26. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ și $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că dacă $S_n = 2n^2 - n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$, atunci șirul este o progresie aritmetică.

27. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$; b) $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{2+i}{1-2i}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

28. Demonstrați că $(3^{2n+1}+5^n) \vdots 4$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

29. Fie a, b, c numere naturale nenule în progresie geometrică. Știind că $a + b + c$ este număr par, să se arate că numerele a, b, c sunt pare.

30. Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in\mathbb{Z}\}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

Exerciții propuse la examenul de Bacalaureat în anii precedenți

31. Calculați partea întreagă și partea fracționară a numărului $\sqrt{3}+\pi$.

(Variante Bacalaureat 2008)

32. Fie mulțimile A, B, C. Demonstrați că $A \cup (C \setminus B) = B \cup (C \setminus A)$ implică $A = B$.

(Variante Bacalaureat 2008)

33. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât x^5 și x^{17} aparțin lui $\mathbb{Q}$. Arătați că $x \in \mathbb{Q}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

34. Dați un exemplu de număr $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $\left|a-\sqrt{2}\right| < \frac{1}{100}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

35. Știind că $\lg 7 \simeq 0{,}845$, aflați partea întreagă a lui $\lg 0{,}7$.

(Variante Bacalaureat 2008)

36. Determinați valoarea de adevăr a propoziției: $(\exists)\ p \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left|\frac{3n+5}{2n+7}-\frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$, oricare ar fi $n > p$.

(Variante Bacalaureat 2008)

37. Arătați că $\frac{\overline{aaa}}{75}$ este fracție zecimală finită.

(Variante Bacalaureat 2008)

38. Rezolvați ecuația $[x] = \{x\}, x \in \mathbb{R}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

39. Calculați suma $2^3 - 2^4 + 2^5 - ... - 2^{20}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

40. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $b^2 < 4ac$ și $a + b + c < 0$. Stabiliți semnul numărului a.

(Variante Bacalaureat 2008)

41. Precizați valoarea de adevăr a propoziției: $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $\left|x^2-\sqrt{5}\right| \le x^2+\sqrt{5}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

42. Demonstrați că $(n^3+5n) \,\vdots\, 6$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

(Variante Bacalaureat 2008)

43. Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$, astfel încât $\frac{a\sqrt{2}+b}{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{Q}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

44. Determinați mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid [x^2] < 1\}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

45. Calculați $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

46. Determinați partea întreagă și partea fracționară a numărului $a=\sqrt{2}+\sqrt{10}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

47. Stabiliți semnul numărului $a=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+3}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

48. Demonstrați, prin inducție matematică, că $3^n \geq 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

49. Rezolvați ecuația $|x| = [x], x \in \mathbb{R}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009).

50. Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \frac{1}{10}$.

(Variante Bacalaureat, M2, 2009)

Test de (auto)evaluare 1

Subiectul I 30p

1. Dacă $\frac{2}{7} = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ calculați $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2050}$.

2. Aflați $\left[\sqrt{2050^{2050} + 1}\right]$, știind că $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului $a \in \mathbb{R}$.

3. Arătați că numărul $z = 3(2 - \mathrm{i}) - 2(3 - 2\mathrm{i})$ este pur imaginar.

4. Aflați al nouălea termen al unei progresii aritmetice, știind că rația ei este $\frac{1}{10}$ din al treilea termen, care este egal cu 20.

5. Dați un exemplu de două numere iraționale x și y astfel încât $x + y \in \mathbb{N}^*$ și $x \cdot y \in \mathbb{N}$.

6. Aflați suma unei progresii aritmetice cu rația 2 și $a_1 - a_n = -20$.

Subiectul al II-lea 30p

1. a) Arătați că $\{\{x\} + y\} = \{x + \{y\}\}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, unde $\{a\}$ = partea fracționară a numărului a.

b) Comparați numerele $a = \left\{\sqrt{3} + \left\{\sqrt{3} + \sqrt{7}\right\}\right\}$ și $b = \left\{\sqrt{3} + \left\{\sqrt{3}\right\} + \sqrt{7}\right\}$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Să se demonstreze că:

a) $\left(\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}\right) \in \mathbb{R}$; b) $\left(\frac{z^n}{\overline{z}^n} + \frac{\overline{z}^n}{z^n}\right) \in \mathbb{R}$.

3. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ în progresie aritmetică, cu rația r.

a) Arătați că șirul $b_n = a_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ este o progresie aritmetică cu rația $2r$.

b) Calculați în funcție de a_1 și r suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $n \geq 1$.

Subiectul al III-lea **30p**

1. a) Dacă $x, y \in (-1, 1)$, demonstrați că $1 - xy \neq 0$ și $\frac{x-y}{1-xy} \in (-1, 1)$.

b) Dacă $x, y, z \in (-1, 1)$, demonstrați că $1 - xy - xz + yz \neq 0$ și $\left|\frac{x-y-z+xyz}{1-xy-xz+yz}\right| < 1$.

2. a) Fie $z \in \mathbb{C}$, $y \neq 0$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, există $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $z^n = a_n \bar{z} + b_n$.

b) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{Q}$, unic determinate, astfel încât

$\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$.

3. a) Să se demonstreze că dacă $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt primii termeni ai unei progresii geometrice fără termeni nenuli, atunci :

$$b_1^n + b_2^n + \ldots + b_n^n = \left(\frac{1}{b_1^n} + \frac{1}{b_2^n} + \ldots + \frac{1}{b_n^n}\right) b_1^2 b_2^2 \ldots b_n^2.$$

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică și $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{a_1 + a_2 + \ldots + a_q} = \frac{p^2}{q^2}$.

Să se calculeze $\frac{a_p}{a_q}$ în funcție de p și q.

Test de (auto)evaluare 2

Subiectul I **30p**

1. Să se calculeze $i^{2045} + i^{2046} + i^{2047} + i^{2048} + i^{2049} + i^{2050}$.

2. Se consideră progresia aritmetică 2, 7, 12, 17, ... Determinați termenul de rang 250 al progresiei.

3. Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, atunci calculați $f(1) + f(2) + \ldots + f(2025)$.